Cálculo de la inversa de una matriz A^{-1}

En primer lugar, recordamos que para que una matriz cuadrada, A, sea regular, es decir, tenga inversa, es necesario y suficiente que su **determinante no sea nulo.**

De esta manera, el determinante se ajusta a la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ Adj } A^t$$

Por tanto, los pasos para calcular la matriz inversa son los siguientes:

1. Hallamos el determinante de A y **solo si no es** nulo podemos continuar.
2. Creamos una nueva matriz con los menores complementarios de cada elemento.
3. Cambiamos los signos correspondientes para obtener la matriz adjunta.
4. Calculamos la matriz traspuesta de la adjunta.
5. Dividimos la matriz resultante por el determinante de A.

Ejemplo 1. Calcula la inversa de la siguiente matriz.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Hallamos el determinante de B y **solo si no es** nulo podemos continuar.

$$\left|B\right| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0+4) - (-4) = 8$$

2. Creamos una nueva matriz con los menores complementarios de cada elemento.

$$MenB = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

3. Cambiamos los signos correspondientes para obtener la matriz adjunta.

$$AdjB = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$AdjB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

4. Calculamos la matriz traspuesta de la adjunta.

$$AdjB^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

5. Dividimos la matriz resultante por el determinante de B (paso 1) y obtenemos la inversa.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2. Calcula la inversa de la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.Hallamos el determinante de A y **solo si no es** nulo podemos continuar.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - (-1) = 5$$

2.Creamos una nueva matriz con los menores complementarios de cada elemento.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

3.Cambiamos los signos correspondientes para obtener la matriz adjunta.

$$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$$

$$Adj A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

4.Calculamos la matriz traspuesta de la adjunta.

$$Adj A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

5.Dividimos la matriz resultante por el determinante de A.

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.Calcula la inversa de la siguiente matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1.Hallamos el determinante de A y **solo si no es** nulo podemos continuar.

$$\left|A\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (3) - (2) = 1$$

2.Creamos una nueva matriz con los menores complementarios de cada elemento.

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.Cambiamos los signos correspondientes para obtener la matriz adjunta.

$$AdjA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & +4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.Calculamos la matriz traspuesta de la adjunta.

$$AdjA^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

5.Dividimos la matriz resultante por el determinante de A (paso 1) y obtenemos la inversa.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4. Calcula la inversa de la siguiente matriz.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.Hallamos el determinante de B y **solo si no es** nulo podemos continuar.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -(-2) = 2$$

2.Creamos una nueva matriz con los menores complementarios de cada elemento.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.Cambiamos los signos correspondientes para obtener la matriz adjunta.

$$AdjB = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

4.Calculamos la matriz traspuesta de la adjunta.

$$AdjB^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.Dividimos la matriz resultante por el determinante de B (paso 1) y obtenemos la inversa.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Si tienes cualquier duda y quieres ponerte en contacto conmigo, puedes hacerlo escribiéndome a yosoytuprofe.miguel@gmail.com, o bien a través de mis perfiles en redes sociales (Facebook,Twitter yYoutube).

Nos vemos en la siguiente clase.