Yo Soy Tu Profe

Continuidad de una función a trozos

Antes de comenzar debemos recordar unos resultados que nos simplificarán el cálculo:

- **Si f(x) es continua en "c" entonces:**

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Para calcular la continuidad de una función a trozos debemos tener en cuenta los siguientes aspectos:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x < c \\ f_2(x) & x \geq c \end{cases}$$

Debemos hacer el cálculo de *lím f(x)* en el punto de ruptura.

En primer lugar, debemos analizar si f_1 y f_2 son continuas. Si es así, se debe cumplir lo siguiente:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f_1(c) = \lim_{x \to c^+} f(x) = f_2(c) = f(c)$$

Si coinciden estos valores el límite existe, si no coinciden, no, por tanto, la función no sería continua.

Yo Soy Tu Profe

Ejemplo 1. Averigua si la siguiente función es continua en x=-1. (Ejercicio resuelto)

$$h(x) = \begin{cases} 2x+2 & x \leq -1 \\ x^2-1 & x > -1 \end{cases}$$

La función h(x) está compuesta por dos tramos: f1(x)= 2x+2, una recta y f2(x) ,una parábola. Por separado ambas son continuas. Así, el único punto donde esta función a trozos puede ser discontinua es en el punto de ruptura. Por tanto, debemos estudiar la continuidad en x=-1.

Para que la función sea continua en x=-1 debe cumplirse que:

$$\lim_{x^- \to -1} h(x) = \lim_{x^+ \to -1} h(x) = f(-1)$$

Por tanto,

$$\lim_{x^- \to -1} h(x) = \lim_{x^- \to -1} 2x+2 = 2.(-1)+2 = 0$$

$$\lim_{x^+ \to -1} h(x) = \lim_{x^+ \to -1} x^2-1 = (-1)^2-1 = 0$$

$$f(-1) = 0$$

De esta manera, como se cumple, la función es continua.

Ejemplo 2.Calcula “a” para que la siguiente función sea continua. (Ejercicio resuelto)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & x \leq 0 \\ x & 0 < x < 2 \\ 2x + a & x \geq 2 \end{cases}$$

Nos encontramos con una función a trozos cuyos tramos son continuos en todo su dominio. Por tanto, debemos estudiar la continuidad en los puntos de ruptura, x=0 y x=2.

Primero estudiamos en **x=0.** Para que la función sea continua en x=0 se debe cumplir:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 - 3x = 0$$

La función es continua en x=0.

Estudiamos ahora en **x=2**. Así, para que la función sea continua en x=0 se debe cumplir:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x = 2$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 2x + a = 4 + a$$

De esta manera, para que la función sea continua:

4+a=2
a=-2

Así, cuando a=-2 la función es continua en todo su dominio.

Si tienes cualquier duda y quieres ponerte en contacto conmigo, puedes hacerlo escribiéndome a yosoytuprofe.miguel@gmail.com, o bien a través de mis perfiles en redes sociales (Facebook,Twitter yYoutube).

Nos vemos en la siguiente clase.