

Método de Gauss

El método de Gauss consiste en transformar un sistema de ecuaciones lineal en otro escalonado. Por ejemplo:

$$\left. \begin{array}{rcl} x & +y & +3z = -8 \\ & +y & +3z = 8 \\ & & z = 2 \end{array} \right\}$$

Si te fijas, ya podemos despejar directamente una de las incógnitas. Por tanto, este tipo de sistemas es muy fácil de resolver, obteniendo el valor de las incógnitas de abajo hacia arriba sustituyendo los valores obtenidos en las anteriores.

$$z=2$$

$$y+3.(2)=8; y=8-6=2; y=2$$

$$x+(2)+3.(2)=-8; x=-16$$

Si nuestro sistema no es un sistema escalonado, lo podemos resolver mediante **el método de Gauss**. Para ello “hacemos cero”, es decir, sometemos a las ecuaciones a transformaciones elementales:

- Multiplicamos por un número distinto de cero.
- Sumar una ecuación a otra multiplicada por un número.

Para trabajar mejor utilizamos sólo los números (coeficientes y término independiente) y trabajamos con una estructura de matriz.

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{rcl} x & +y & +z = 2 \\ 3x & -2y & -z = 4 \\ -2x & +y & +2z = 2 \end{array} \right\}$$

Utilizamos los coeficientes y los términos independientes y realizamos una matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Primeras transformaciones:

1. **Fila uno** se mantiene

2. **Fila dos** le resto tres veces la **fila uno**.
3. **Fila 3** le sumo dos veces la **fila uno**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Segundas transformaciones:

1. **Fila uno** se mantiene
2. **Fila dos** se mantiene.
3. 5 veces la **fila tres** le sumo 3 veces la **fila dos**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{pmatrix}$$

De esta manera, el sistema resulta:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ -5y - 4z = -2 \\ 8z = 24 \end{array} \right\}$$

Siendo la solución:

$$\begin{aligned} z &= 3 \\ -5y - 4 \cdot 3 &= -2; y = -2 \\ x + (-2) + 3 &= 2; x = 1 \end{aligned}$$

Realiza ahora tú mismo estos dos ejercicios por el método de Gauss:

$$1) \begin{cases} x + 2y + 4z = 35 \\ 4x + 4y + z = 34 \\ 2x + 3y + 4z = 42 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x + 3y + 2z = 25 \\ z = 3x \end{cases}$$

Resolvemos el primer ejercicio:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 35 \\ 4x + 4y + z = 34 \\ 2x + 3y + 4z = 42 \end{cases}$$

Utilizamos los coeficientes y los términos independientes y realizamos una matriz:

$$\begin{pmatrix} +1 & +2 & +4 & +35 \\ +4 & +4 & +1 & +34 \\ +2 & +3 & +4 & +42 \end{pmatrix}$$

Necesitamos hacer ceros en los números destacados en la matriz anterior.

Primeras transformaciones, deseamos realizar los ceros de la primera columna:

Primer paso, transformar la segunda fila,

1. Fila uno multiplicada por -4

$$-4 \cdot (+1 +2 +4 +35) = -4 -8 -16 -140$$

2. Le sumo la fila 2.

$$\begin{array}{cccc} -4 & -8 & -16 & -140 \\ +4 & +4 & +1 & +34 \\ \hline 0 & -4 & -15 & -106 \end{array}$$

Segundo paso, transformar la tercera fila,

3. Fila uno multiplicada por -2.

$$-2. (+1 +2 +4 +35) = -2 -4 -8 -70$$

4. Le sumo la fila 3.

$$\begin{array}{cccc} -2 & -4 & -8 & -70 \\ +2 & +3 & +4 & +42 \\ \hline 0 & -1 & -4 & -28 \end{array}$$

Así, la matriz resultante sería:

$$\begin{pmatrix} +1 & +2 & +4 & +35 \\ 0 & -4 & -15 & -106 \\ 0 & -1 & -4 & -28 \end{pmatrix}$$

Segundas transformaciones, deseamos realizar el ceros de la segunda columna:

Para ello, sólo utilizamos la segunda y tercera fila:

1. Fila uno se mantiene.
2. Fila dos se mantiene.
3. Fila tres se multiplica por -4.

$$-4. (0 -1 -4 -28) = (+0 +4 +16 +112)$$

Sumo la fila dos y tres transformadas.

$$\begin{array}{cccc} 0 & -4 & -15 & -106 \\ 0 & +4 & +16 & +112 \\ \hline 0 & 0 & +1 & +6 \end{array}$$

De esta manera, el sistema resulta:

$$\begin{pmatrix} +1 & +2 & +4 & +35 \\ 0 & -4 & -15 & -106 \\ 0 & 0 & +1 & +6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = +35 \\ -4y - 15z = -106 \\ +z = 6 \end{cases}$$

Siendo la solución:

$$z = +6$$

Sustituimos el valor de “z” en la segunda ecuación y obtenemos el valor de “y”:

$$-4y-15.+6=-106$$

$$-4y=-106+90$$

$$y=-16/-4=4$$

$$y=+4$$

Sustituimos el valor de “z” e “y” en la primera ecuación y obtenemos “x”:

$$x+2.(+4)+4.(+6)=+35$$

$$x=+35-8-24$$

$$x=+3$$

Resolvemos el segundo ejercicio:

$$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x + 3y + 2z = 25 \\ z = 3x \end{cases}$$

Utilizamos los coeficientes y los términos independientes y realizamos una matriz:

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +11 \\ +2 & +3 & +2 & +25 \\ -3 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}$$

Necesitamos hacer ceros en los números destacados en la matriz anterior.

Primeras transformaciones, deseamos realizar los ceros de la primera columna:

Primer paso, transformar la segunda fila,

1. Fila uno multiplicada por -2

$$-2. (+1+1 +1 +11) = (-2 -2 -2 -22)$$

2. Le sumo la fila 2.

$$\begin{array}{cccc} -2 & -2 & -2 & -22 \\ +2 & +3 & +2 & +25 \\ \hline 0 & +1 & 0 & +3 \end{array}$$

Segundo paso, transformar la tercera fila,

3. Fila uno multiplicada por 3.

$$+3. (+1 +1 +1 +11) = (+3 +3 +3 +33)$$

4. Le sumo la fila 3.

$$\begin{array}{cccc} +3 & +3 & +3 & +33 \\ -3 & 0 & +1 & 0 \\ \hline 0 & +3 & +4 & +33 \end{array}$$

Así, la matriz resultante sería:

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +11 \\ 0 & +1 & 0 & +3 \\ 0 & +3 & +4 & 33 \end{pmatrix}$$

Segundas transformaciones, deseamos realizar el ceros de la segunda columna:

Para ello, sólo utilizamos la segunda y tercera fila:

1. Fila uno se mantiene.
2. Fila dos se multiplica por -3.

$$-3.(0 +1 0 +3) = (0 -3 0 -9)$$

3.Fila tres se mantiene

Sumo la fila dos y tres transformadas.

$$\begin{array}{cccc} 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 3 & +4 & +33 \\ \hline 0 & 0 & 4 & +24 \end{array}$$

De esta manera, el sistema resulta:

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +11 \\ 0 & +1 & 0 & +3 \\ 0 & 0 & +4 & +24 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ \quad + y = 3 \\ \quad \quad 4z = 24 \end{cases}$$

Siendo la solución:

$$4z = 24$$

$$z = 24/4 = 6$$

$$Z = 6$$

$$Y = 3$$

$$X = 11 - 3 - 6 = 2$$

$$X = 2$$

Si tienes cualquier duda y quieres ponerte en contacto conmigo, puedes hacerlo escribiéndome a yosoytuprofe.miguel@gmail.com, o bien a través de mis perfiles en redes sociales (Facebook, Twitter, Instagram o Youtube).

Nos vemos en la siguiente clase.