Discusión de un sistema de ecuaciones en función de un parámetro

Recurso elaborado por
Miguel Ángel Ruiz Domínguez

#YSTP

Discusión de un sistema de ecuaciones en función de un parámetro

En la clase de hoy vamos a ver cómo se debe discutir un sistema de ecuaciones según los diferentes valores de un parámetro.

Para ello, vamos a resolver un ejemplo. En este tipo de ejercicios, muy típico de los exámenes, recomendamos que escriban paso a paso todo lo que vayan realizando. Lo deberían hacer habitualmente, pero en estos casos, es muy importante que no solo se dejen llevar por los cálculos y expresen por escrito todo lo que hagan.

Veamos el siguiente ejercicio:

$$\begin{cases} kx & +y & +z & = 1 \\ & y & +z & = 1 \\ x & +ky & +z & = 2 \end{cases}$$

Nos pide discutir según los valores del parámetro "k" el anterior sistema de ecuaciones:

En primer lugar, escribimos el sistema a la forma matricial

$$A^{\prime} = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ahora estudiamos el rango de la matriz de coeficientes, calculando el determinante de A.

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

Lo resolvemos por Sarrus:

$$A = \begin{vmatrix} K & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & K & 1 \end{vmatrix} = (k+0+1) - (1+k^2+0) = \text{k-}k^2$$

Igualamos el valor del determinante de A a 0 para saber en qué valores del parámetro se anula. Son los casos en los que debemos detenernos.

$$k - k^2 = 0$$

$$k \cdot (1-k) = 0$$

$$k = 0$$

$$1-k = 0$$

$$k = 1$$

Por tanto, debemos estudiar el sistema en función de los siguientes valores de "k", k=0 y k=1.

Para k=0

Miro el rango de la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos como la primera fila y la segunda son iguales. De este modo, el rango ya no puede ser 3, como mucho podría ser 2.

Hacemos el determinante de un menor para ver si las segunda y la tercera fila son independientes.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Como es distinto de cero, el rango de la matriz A es 2.

Miro el rango de la matriz A´:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Al igual que antes, nos encontramos con que las dos primeras filas son iguales, el rango no puede ser 3. Debemos valorar si es 2 o 1. Para ello cogemos un menor de la segunda y tercera fila.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

Al ser distinto de cero, comprobamos que el rango de A´ es 2.

De este modo, podemos decir que si k=0 el rango de A = rango A´<nº incógnitas, por tanto es un SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO.

Para k=1

Repito el proceso

Miro el rango de la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La fila 1 y la fila 3 son iguales. El rango no puede ser 3.

Hacemos el determinante de un menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = +1$$

Al ser distinto de 0, el rango de A es 2.

Miro el rango de la matriz A´:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Descarto una de las columnas, la 2 y la tres son iguales:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2+1+0)-(1+1+0)=3-2=1$$

Al ser distinto de O el rango de A´es igual a 3.

Por tanto, si para k = 1 el rango de A ≠ rango de A´ el SISTEMA ES INCOMPATIBLE

Para cualquier valor que no sea k=0 o k=1 el sistema es compatible determinado, porque el rango de A = rango de A´= 3.

Por ejemplo, si k = 3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango de A:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (3+0+1) - (1+9+0) = -6$$

Con esto, comprobamos como el rango de A es 3 al igual que el rango de A´.

Así, ya hemos discutido nuestro sistema en función de los valores del parámetro "K".

En este caso, debemos tenerlo en cuenta si nos piden resolverlo. Por ejemplo, si nos piden que lo resolvamos para k=2, sabemos ya de antemano que el sistema es compatible determinado.

Si tienes cualquier duda sobre algún ejercicio o problema, puedes dejar un comentario en el foro de esta misma entrada. De esta manera, otras personas podrán ver la consulta, la solución correspondiente y así contribuimos a compartir juntos.

¡No lo olvides! Síguenos en las redes ☺

Facebook,Twitter,Instagram o YouTube

Nos vemos en la siguiente clase.