Problemas de optimización

Recurso elaborado por
Miguel Ángel Ruiz Domínguez
#YSTP

Problemas de optimización

En la clase de hoy trabajaremos con problemas de optimización. Este tipo de ejercicios es muy común en los exámenes de cursos superiores y suelen representar dificultades. A continuación veremos una serie de pasos que nos ayudarán a realizarlos correctamente.

Lo más difícil de este tipo de problemas es encontrar la expresión analítica de la función. Antes que nada debemos tener en cuenta que la función debe ser continua. Una vez esto debemos:

1. Buscar las condiciones que nos da el enunciado.
2. Buscar la relación entre las variables x e y.
3. Despejar una de ellas.
4. Buscar la expresión analítica que debemos optimizar basándonos en las expresiones del enunciado del problema.
5. Derivamos e igualamos a cero para hallar los extremos.
6. Calculamos la segunda derivada para comprobar el resultado y saber si hemos obtenido un máximo o un mínimo.

Una empresa de productos de limpieza fabrica cajas de cartón con tapa para comercializar un determinado tipo de detergente. Las cajas son prismas rectos de 9000 cm^3 de volumen y tienen de base rectangular de largo el doble de su anchura. Calcular las dimensiones en cm que ha de tener una caja para que la superficie sea máxima.

Planteamiento :

Largo: 2x

Ancho: x

Alto : y

Relación entre las variables:

Volumen = Ancho x Largo x Alto

$V(x) = 2x . x . y = 9000$

De esta expresión despejamos "Y"

$y = 9000 / 2x^2 = 4500/x^2$

Función a optimizar:
Superficie = 2 BASE + 2 LADO GRANDE + 2 LADO PEQUEÑO

S (x) = 2 BASE + 2 LADO GRANDE + 2 LADO PEQUEÑO

$S(x) = 2. (2x.x) + 2. (2x.y) + 2. (x.y)$

Sustituyo la "y" por su valor.

$S(x) = 4. x^2 + 4. x . (4500/x^2) + 2x . (4500/x^2) = 4.x^2 + 18000/x + 9000/x$

Derivamos:

Ahora, derivamos esta función que hemos obtenido:

$S´(x) = 8x – 18000/x^2 – 9000/ x^2$

Lo igualo a 0. De este modo podremos saber los puntos de extremos absolutos.

$x – 18000/x^2 – 9000/ x^2 = 0$

$8x = 27000/x^2$

$x^3 = 27000/ 8 = 3375$

$x = 15$

Ahora calculamos "y" :

$y = 4500/x^2 = 4500/15^2 = 20$

$$y = 20$$

Hacemos la segunda derivada:

$S''(x) = 8 -+36000/x^3 +18000/ x^3$

$S''(15) = 8 -+36000/15^3 +18000/ 15^3 = 24$

Al sustituir el valor en la segunda derivada nos da un valor positivo, por tanto, sabemos que la función ha sido minimizada y que ese punto es un mínimo de ella.

Solución:

$S(x) = 2. (2. 15. 15) + 2. (2. 15.20) + 2. (15. 20) = 2700 \text{ cm}^2$

Si queremos que la superficie sea mínima las dimensiones deben ser:

Largo: $2x = 30$ cm
Ancho: $x = 15$ cm
Alto : $y = 20$ cm

Una persona amante de las matemáticas desea donar sus 3600 libros a dos bibliotecas A y B. El producto del número de libros destinados a la biblioteca B por el cubo de números de libros destinado a la biblioteca A sea máximo. Determina también la cantidad de libros.

Planteamiento:
A: x libros
B: y libros

Relación entre las variables:
$x+y = 3600$

$y = 3600-x$

Función a optimizar:

"El producto del número de libros destinados a la biblioteca B por el cubo de números de libros destinado a la biblioteca A sea máximo"

$L(x) = x^3. Y$

$L(x) = x^3 . (3600- x)$

Derivamos:

$L'(x) = 10800 x^2 -4 x^3$

Lo igualo a 0. De este modo podremos saber los puntos de extremos absolutos.

$10800 x^2 -4 x^3= 0$

$x^2 . (10800 – 4x) = 0$

$x= 0 \quad x= 2700$

Hacemos la segunda derivada:
$L''(x) = 21600 x – 12x^2$

$L''(2700) = 21600 \cdot 2700 - 12 \cdot (2700)^2 = -29160000$

$L''(0) = 21600 \cdot 0 - 12 \cdot 0^2 = 0$

Para x = 2700, la segunda derivada nos da negativa, por tanto, la función ha sido maximizada y ese punto es un máximo.

Solución:
Para x= 2700 la función tiene un máximo

De este modo, si la biblioteca A se lleva 2700 libros y la biblioteca B se lleva 900 hay un máximo.

Si tienes cualquier duda sobre algún ejercicio o problema, puedes dejar un comentario en el foro de esta misma entrada. De esta manera, otras personas podrán ver la consulta y la solución correspondiente y así contribuimos a compartir juntos.

¡No lo olvides! Síguenos en las redes ☺

Facebook,Twitter,Instagram o YouTube

Nos vemos en la siguiente clase.